四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部

數學鑰卷三上 三下 三附

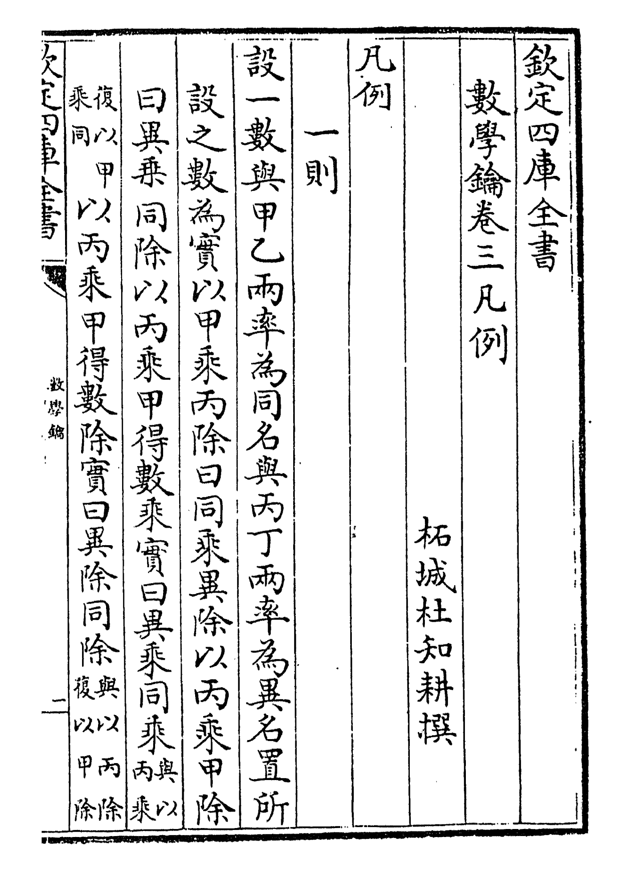
詳校官欽天監博士臣張尚鑑

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官進士臣朱鈐

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣王宮



欽定四庫全書

數學鑰卷三凡例

柘城杜知耕撰

凡例

一則

設一數與甲乙兩率爲同名與丙丁兩率爲異名置所設之數爲實以甲乘丙除曰同乘異除以丙乘甲除曰異乘同除以丙乘甲得數乘實曰異乘同乘與以丙乘復以甲乘同以丙乘甲得數除實曰異除同除與以丙除復以甲除

同以丙乘丁除曰異乘異除以甲乘乙除曰同乘同除

二則

設一數以一率除二率乘又以三率除四率乘又以五率除六率乘方得所求變為以四率乘二率復以六率乘之得數乘實以三率乘一率復以五率乘之得數除實即得所求亦曰同乘同除

三則

凡用一率除二率乘者則變為先以二率乘後以一率

除凡用一率除復用二率除者則變為以一率乘二率得數除實恐歸除多有畸零不盡之數也

四則

設甲乙丙三率以甲乘乙以乙乘丙曰遞乘以甲乘乙以乙乘丙以丙復乘甲曰維乘以甲乘乙復以乙乘甲曰互乘以甲乘乙復乘丙曰遍

五則

命分數曰母得分數曰子母數者子之本數子數者母之分數

六則

設兩數一為法一為實以法除實得若干將法實任各若干倍之以倍法除倍實必仍得若干與原得數同若以倍法除元實則得數小于元得數之倍數即同元法小于倍法之倍數若以元法除倍實則得數大于元得數之倍數即倍實大于元實之倍數如元實為六十元法為五十以五十除六十得十二任三倍元實為一百八十亦三倍元法為一百五十以一百五十除一百八十亦得十二與元得數同以倍法一

百五十除元實六十得四則四與元得數十二之比例若元法五十與倍法一百五十也以元法五十除倍實一百八十得三十六則三十六與元得數十二之比例若倍實一百八十與元實六十也

數學鑰卷三凡例

數學鑰卷三上目録

柘城杜知耕撰

十五則銀色二法

十六則銀色三法

十七則銀色四法

十八則銀色五法

十九則銀色六法

二十則斤兩一法

二十一則斤兩二法

二十二則斤兩三法

二十三則斤兩四法

卷三下目録

衰分

三則四六差分

四則三七差分

五則二八差分

六則遞減差分一法

七則遞減差分二法

八則遞減差分三法

九則帶分子母差分一法

十則帶分子母差分二法

十一則互和遞減差分一法

二則約分

三則乘分

四則課分

五則通分

數學鑰卷三目録

數學鑰卷三上

栢城杜知耕撰

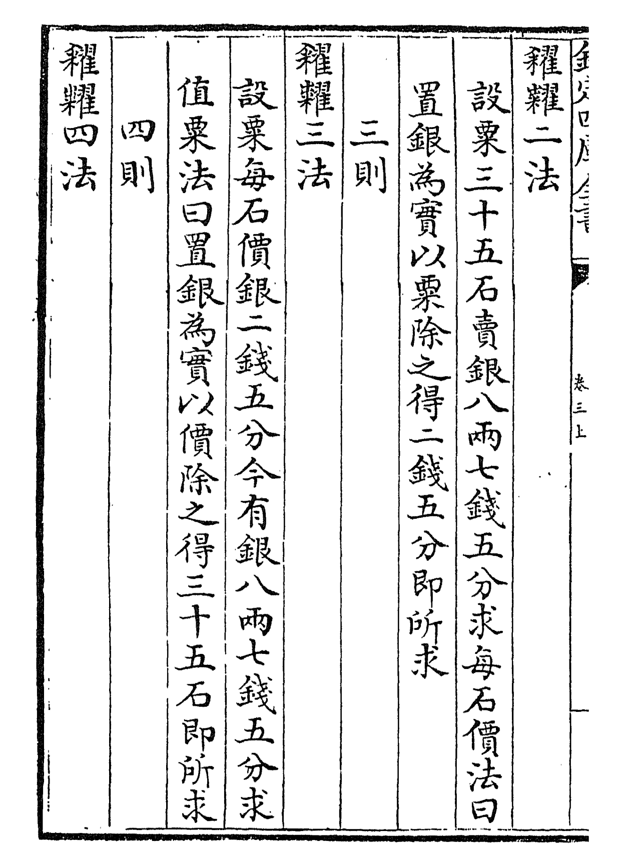
粟布

一則

糴糶一法

設粟三十五石每石價銀二錢五分求共銀法曰置粟為實以價乘之得八兩七錢五分即所求

二則



糴糶二法

設粟三十五石賣銀八兩七錢五分求每石價法曰

置銀為實以粟除之得二錢五分即所求

三則

糴糶三法

設粟每石價銀二錢五分今有銀八兩七錢五分求

值粟法曰置銀為實以價除之得三十五石即所求

四則

糴糶四法

設銀八兩七錢五分共買粟三十五石求每銀一兩值粟若干法曰置粟為實以銀除之得四石即所求

解曰凡以物交易或論箇論斛論斤論尺之類莫不有數有價以價乘共物則得共銀以價除共銀則得共物以共物除共銀則得每一物所值之價以共銀除共物則得每銀一兩或一錢或一分所值之物交易常用之法盡于此矣

五則

糶糴五法

設原有粟二石六斗賣銀六錢五分今有粟三十五石求值銀法曰置今粟為實以原價乘之得二十二兩七錢五分以原粟除之得八兩七錢五分即所求

解曰此異乘同除也銀與粟異名以原銀乘今粟故謂異乘粟與粟同名以原粟除今粟故謂同除若以原粟除原價得每石價以乘今粟或先以原粟除今粟再以原價乘之俱未嘗不合但先用歸除恐遇奇零不盡之數難用乘法故變為先乘後除也

六則

糶糴六法

設原有銀三十兩零七錢五分買粟一百二十三石今有銀八兩七錢五分求值粟法曰置今銀為實以原粟乘之得一千零七十六兩二錢五分以原銀除之得三十五石即所求

解同前

七則

糶糴七法

設原銀五錢買米一石每米八斗五升換粟一石七

斗今有銀八兩七錢五分求值粟法曰以今銀八兩七錢五分乘粟一石七斗得一十四兩八錢七分五釐為實以米價五錢乘米八斗五升得四錢二分五釐為法除之得三十五石即所求

解曰米八斗五升粟一石七斗其價等法以米價乘米所得之四錢二分五釐既為八斗五升之米價亦一石七斗之粟價也以粟乘銀以價除之亦異乘同除法也

八則

糶糴八法

設粟一石七斗換米八斗五升每米一石價銀五錢今有粟三十五石求值銀法曰置米八斗五升以米價五錢乘之得四錢二分五釐再以今粟三十五石乘之得一十四兩八錢七分五釐為實以粟一石七斗除之得銀八兩七錢五分即所求

解同前

九則

撞換一法

設稻每石價六錢二分五釐粟每石價二錢五分今有稻一十四石換粟求粟數法曰置稻一十四石為實以稻價乘之得八兩七錢五分以粟價除之得三十五石即所求

十則

撞換二法

設每菽三斗換黍二斗每黍四斗換稷三斗每稷五斗換稻四斗每稻六斗換麥五斗今有麥七斗換菽求菽數法曰以今麥七斗乘每稻六斗得四石二斗再以

每稷五斗乘之得二十一石再以每黍四斗黍之得八十四石再以每菽三斗乘之得二百五十二石爲實以換黍二斗乘換稷三斗得六斗再以換稻四斗乘之得二石四斗再以換麥五斗乘之得一十二石爲法除之得二石一斗即所求

解曰若置麥七斗爲實以換麥五斗除之以每稻六斗乘之得八斗四升爲麥七斗應換之稻再以八斗四升爲實以換稻四斗除之以每稷五斗乘之得一石零五升爲麥七斗應換之稷再以一石零五升爲實以換稷三斗除之以每黍四斗乘之得一石四斗

為麥七斗應換之黍再以一石四斗為實以換黍二斗除之以每菽三斗乘之得二石一斗為麥七斗應換之菽凡四除四乘方得菽數今遞乘為實遞乘為法一次歸除即得所求非徒省力亦免遇畸零之數難於布算耳

十一則

撞換三法

設黍一石換菽三石每黍三石換麥一石今黍三十三石共換菽麥一十九石求菽麥各若干法曰列黍

右
換麥一石
換菽三石
九石
共菽麥一十九石
十九石
左
黍三石
黍一石
一石
共黍三十三石
九十九石
對減餘八石
對減餘八十石

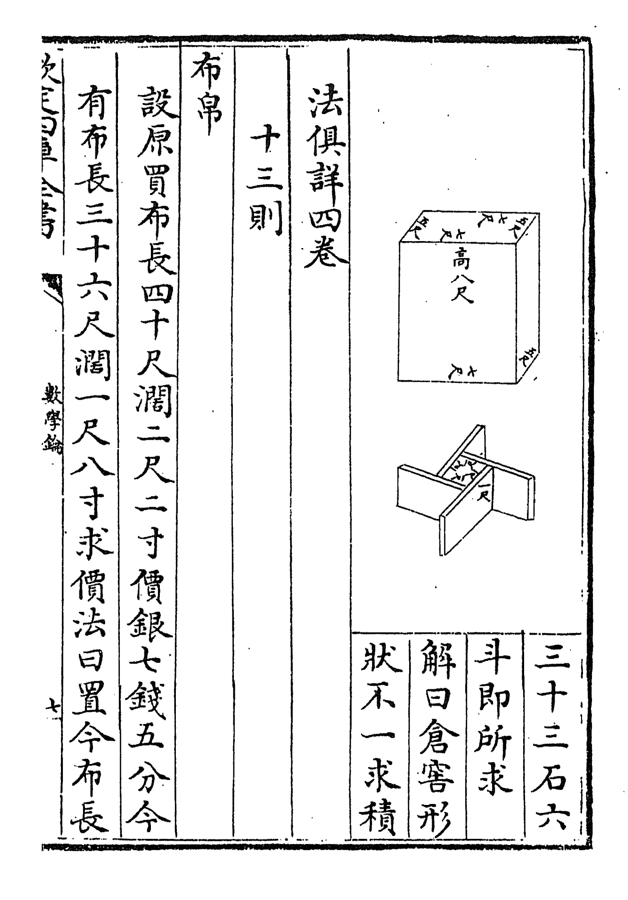
三石黍一石共黍三十三石于左列麥一石菽三石共菽麥一十九石于右先以右上互乘左中仍得一石以左上互乘右中得九石兩數相減餘八石為長法次以左中互乘右下仍得一十九石以右中互乘左下得九十九石兩數相減餘八十石以長法除之得一十石為短法以麥一石乘短法仍得十石為麥數以黍三石乘短法

得三十石為换麥黍數以麥數減共菽數餘九石為菽數以换麥黍數減共黍餘三石為换菽黍數解見三卷下十七則

十二則

盤量倉窖

設直倉底長七尺濶五尺高八尺求容粟數法曰以底濶乘長得三十五尺再以高乘之得二百八十尺為實取木板四塊如圖錯綜合之令縱廣及高各一尺納粟于内令平以升量之假如一斗二升即以之為法乘實得



三十三石六斗即所求

解曰倉窖形狀不一求積法俱詳四卷

十三則

布帛

設原買布長四十尺濶二尺二寸價銀七錢五分今有布長三十六尺濶一尺八寸求價法曰置今布長

三十六尺以濶一尺八寸乘之得六十四尺八寸再以原價七錢五分乘之得四十八兩六錢為實另置原布長四十尺以濶二尺二寸乘之得八十八尺為法除實得五錢五分二釐二毫有奇即所求

十四則

銀色一法

設九三色銀一兩二錢傾銷足色求銀數法曰置銀一兩二錢為實以銀色九三乘之得一兩一錢一分六釐即所求

十五則

銀色二法

設足色銀一兩一錢一分六釐改傾九三色求銀數

法曰置銀一兩一錢一分六釐為實以九三除之得

一兩二錢即所求

十六則

銀色三法

設八五色銀五兩六錢改傾九五色銀求銀數法曰

置銀五兩六錢為實以八五乘之得四兩七錢六分再以九

五除之得五兩零一分零五毫即所求

十七則

銀色四法

設足色銀七兩六錢五分傾成九兩求銀色法曰置銀七兩六錢五分為實以九兩除之得八五即所求

十八則

銀色五法

設足色銀三十五兩二錢改傾八八色銀求加銅數法曰置銀三十五兩二錢為實以八八除之得四十兩與

原銀相減餘四兩八錢即所求

十九則

銀色六法

設傾八八色銀用銅四兩八錢求用銀數法曰置銅四兩八錢為實以八八與一兩相減餘一錢二分為法除之得四十兩與銅數相減餘三十五兩二錢即所求

二十則

斤兩一法

設物重一千四十兩求斤法曰置物重為實以斤法

十六除之得六十五斤即所求

二十一則

斤兩二法

設物重六十五斤求兩法曰置物重為實以斤法十六乘之得一千四十兩即所求

二十二則

斤兩三法

設物重六十五斤四兩每斤價二錢五分求共價法曰先取四兩以斤法十六除之得二五並六十五斤之

下成六五二五為實以價乘之得一十六兩三錢一分二釐五毫即所求

二十三則

斤兩四法

設物每斤價二錢五分今銀一十六兩三錢一分二釐五毫求值物重法曰置今銀為實以價為法除之得六十五斤二五取斤下二五以斤法十六乘之得四兩共六十五斤四兩即所求

二十四則

斤兩五法

設物每斤價四兩求每兩價法曰置每斤價為實以

斤法十六除之得二錢五分即所求

二十五則

斤兩六法

設物每兩價二錢五分求斤價法曰置每兩價為實

以斤法十六乘之得四兩即所求

二十六則

權重一法

設秤原錘重二十六兩遇重物不能勝另取一物重四十六兩八錢作錘秤之得一千零七十二兩求物重真數法曰置物重一千零七十二兩為實以借用作錘之四十六兩八錢乘之得五萬零一百六十九兩六錢再以原錘二十六兩除之得一千九百二十九兩六錢即所求

解曰借用之錘重于原錘若干倍則借用之錘所秤之物重亦重于原錘所秤之物重若干倍以原錘除借用之錘得一八是借用之錘重於原錘十分之八

也則于借用錘所秤之一千零七十二兩以十分之八加之必得一千九百二十九兩六錢爲原錘所秤之重法先乘後除者亦異乘同除也本卷五則

二十七則

權重二法

設秤失其錘止有原秤過輕重二物重者重一千九百二十九兩六錢輕者重四十六兩八錢以輕者作錘秤重者得一千零七十二兩求原錘重法曰置四十六兩八錢爲實以一千零七十二兩乘之得五萬零一百

六十九兩六錢以一千九百二十九兩六錢除之得二十六兩即所求

解曰一千九百二十九兩六錢之與一千零七十二兩若四十六兩八錢之與原錘也故以之乘除得原錘之重

二十八則

權重三法

設秤失其錘有輕重兩物不知斤兩以輕者作錘秤重者得五十二兩以重者作錘秤輕者得一十三兩

求原錘重法曰置兩數相乘得六百七十六兩平方開之得二十六兩即所求

解曰兩數之中率即原錘之重兩數相乘平方開之求中率之法也二卷十六則○又法以等重二物一作錘一作物秤之所得之數即原錘之重○按以上三法用之于平星提索同居一位之秤雖有微差尚可得近似之數至于平星提索不同一位相去愈遠其差愈多甚至與真數懸絶留心此道者不可不知也

數學鑰卷三上

數學鑰卷三下

柘城杜知耕撰

衰分諸分附

一則

合率差分

設有銀一百二十一兩一錢七分五釐買稻麥菽三等糧買稻一分每斗價九分二釐麥二分每斗價八分五釐菽三分每斗價三分六釐求三色糧各若干

法曰置共銀為實另二因麥價（得一錢七分）三因菽價（得一錢零八釐）與稻價並（共三錢七分）為法除實得三十二石七斗五升為稻數二因稻數得六十五石五斗為麥數三因稻數得九十八石二斗五升為菽數

解曰稻一麥二菽三共六衰而稻為六分之一麥為六分之二菽為六分之三二因麥價者令麥二倍于稻也三因菽價者令菽三倍于稻也合二與三得五是麥菽得五而稻得一則稻為六分之一矣故並價除實即得稻數也麥原二倍于稻故二因稻數得麥

數叚原三倍于稻故三因稻數得叚數○如求各銀數則以各價乘各數即得

二則

折半差分

設銀六百七十二兩令甲乙丙三等人折半納之求各應納銀數法曰置共銀為實定丙為一衰乙倍丙為二衰甲倍乙為四衰並之共七衰為法除實得九十六兩為丙數二因丙數得一百九十二兩為乙數二因乙數得三百八十四兩為甲數

解曰所謂折半者令乙半於甲丙半於乙以一為丙衰倍一得二為乙衰乙倍于丙即丙半於乙也倍二得四為甲衰甲倍于乙即乙半于甲也並之共得七衰而丙為七分之一故以七除實得丙數餘同前解

三則

四六差分

設銀八百一十二兩五錢令甲乙丙丁四等人四六納之求各應納銀數法曰置共銀為實先定丁為四衰以一五乘四得六為丙衰再以一五乘六得九為

乙衰再以一五乘九得十三衰五分為甲衰並之共
三十二衰五分為法除實得二十五兩為一衰之數
四因二十五兩得一百兩為丁數六因二十五兩得
一百五十兩為丙數九因二十五兩得二百二十五
兩為乙數以十三衰五分乘二十五兩得三百三十
七兩五錢為甲數
解曰定衰之法當六乘四除今用一五乘何也葢四
之于六若一與一五也以一五乘四得六乘六得九
乘九得十三五而十三五之與九九之與六六皆若六

之與四也並四數共三十二衰半除實所得銀數即原銀三十二分五釐之一而丁應納者則三十二分五釐之四故四因一衰之數得丁數也餘同前解

四則

三七差分

設有銀一千九百七十五兩令甲乙丙三等人三七納之求各應納銀數法曰置共銀為實先定丙為九衰七因三歸得二十一為乙衰再七因三歸得四十九為甲衰並之共七十九衰為法除實得二十五兩

為一衰之數九因之得二百二十五兩為丙數以二十一乘之得五百二十五兩為乙數以四十九乘之得一千二百二十五兩為甲數

解曰不以三為丙衰而以九為丙衰者以三為丙衰則不能得甲衰也何也試定三為丙衰七為乙衰七因三歸則得一六三三三不盡定九為丙衰正為甲衰地也若甲乙丙丁四位則九又不可為丁衰必三倍之得二十七為丁衰若五位又三倍二十七得八十一為戊衰位多者倣此

五則

二八差分

設有銀一千零五十兩令甲乙丙三等人二八納之求各應納銀數法曰置共銀為實先定二為丙衰四因二得八為乙衰四因八得三十二為甲衰並之共四十二衰為法除實得二十五兩為一衰之數二因之得五十兩為丙數八因之得二百兩為乙數三十二乘之得八百兩為甲數

解曰遞以四因定衰者以八四倍于二也

六則

遞減差分一法

設米一千一百三十四石令五等人戶遞減納之一等二十四戶二等三十三戶三等四十二戶四等五十一戶五等六十戶求每等及每戶應納銀數法曰置共米為實先定五等六十戶為六十衰二因四等戶數得一百零二衰三因三等戶數得一百二十六衰四因二等戶數得一百三十二衰五因一等戶數得一百二十衰五數並共五百四十衰為法除實得

二石一斗為第五等每戶納數以五等六十戶乘之得一百二十六石為第五等共納數以二因二石一斗得四石二斗為第四等每戶納數以四等五十一戶乘之得二百一十四石二斗為第四等共納數以三因二石一斗得六石三斗為第三等每戶納數以三等四十二戶乘之得二百六十四石六斗為第三等共納數以四因二石一斗得八石四斗為第二等每戶納數以二等三十三戶乘之得二百七十七石二斗為第二等共納數以五因二石一斗得十石零

五斗為第一等每户納數以一等二十四户乘之得二百五十二石為第一等共納數

解同本卷一則

七則

遞減差分二法

設有米二百四十石令甲乙丙丁戊五人納之定甲乙二人納數與丙丁戊三人納數等求各應納米數

法曰置共米為實先以一為戊衰二為丁衰三為丙衰四為乙衰五為甲衰次並戊一丁二丙三得六並

乙四甲五得九以六減九餘三于每人衰數各增三戊得四衰丁得五衰丙得六衰乙得七衰甲得八衰並之共三十衰為法除實得八石為一衰之數四因之得三十二石為戊數五因之得四十石為丁數六因之得四十八石為丙數七因之得五十六石為乙數八因之得六十四石為甲數

解曰若六位令丙丁戊己四人與甲乙二人納數等則並己一戊二丁三丙四共十並乙五甲六共十一兩數相減餘一為實另以甲乙二人與丙丁戊己四

人相減餘二人為法歸之得五各加入每人衰數已得一五戊得二五丁得三五丙得四五乙得五五甲得六五若七位令丙丁戊己庚五人與甲乙二人納數等並庚一己二戊三丁四丙五共十五並乙六甲七共十三是四人衰數反多于二人衰數前法不行矣則置各衰自乘庚得一已得四戊得九丁得十六丙得二十五並之共五十五乙得三十六甲得四十九並之共八十五兩數相減餘三十為實另以甲乙二人與丙丁戊己庚五人相減餘三人為法歸之得

十各加入每人衰數庚得十一己得十四戊得十九丁得二十六丙得三十五乙得四十六甲得五十九餘倣此

八則

遞減差分三法

設米二百六十五石令三等人戸納之上等二十戸每戸多中等七斗中等五十戸每戸多下等五斗下等一百一十戸求各應納米數法曰置共米為實並七斗五斗共一石二斗乘上等戸數得二十四石以五斗因中

等戶數得二十五石兩數並共四十九石減實餘二百一十六石並三等戶數共一百八十戶為法除之得一石二斗為下等納數加五斗共一石七斗為中等納數再加七斗共二石四斗為上等納數以每等納數乘每等戶數得每等共納數

解曰共米內減去上中兩等多于下等米數所餘即一百八十戶均平公納之米除實得一石二斗即每戶均納之數均納之數即下等每戶應納之數也故加五斗得中等每戶納數再加七斗得上等每戶

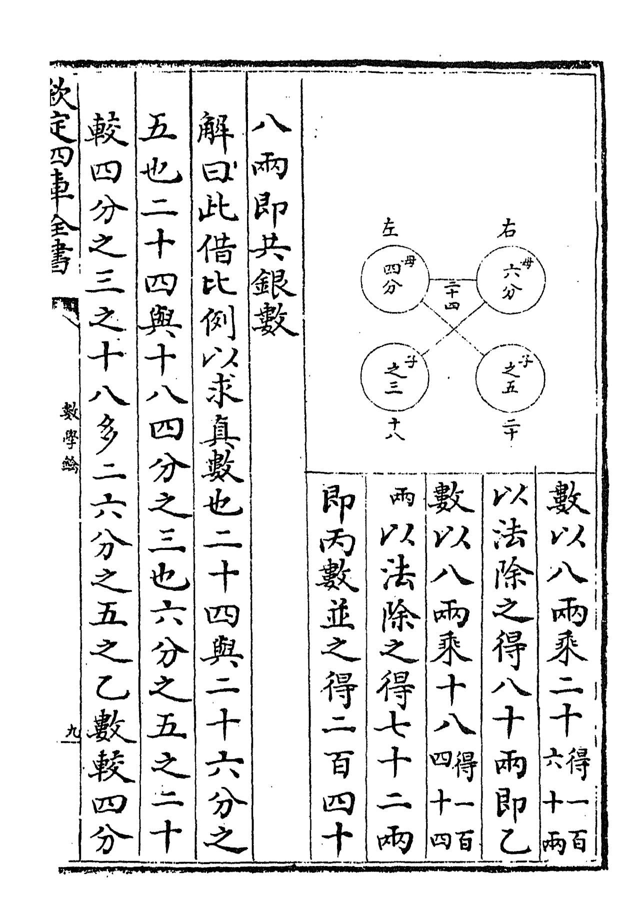
納數

九則

帶分子母差分一法

設甲乙丙三人納銀令乙納甲數六分之五丙納甲數四分之三乙多丙納銀八兩求共銀及各應納銀數

法曰列母四子三于左母六子五于右右上互乘左下得十八左上互乘右下得二十左上右上相乘得二十四以十八減二十餘二為法另以乙多丙八兩乘二十四得一百九十二兩以法除之得九十六兩即甲



數以八兩乘二十得一百六十兩以法除之得八十兩即乙數以八兩乘十八得一百四十四兩以法除之得七十二兩即丙數並之得二百四十八兩即共銀數

解曰此借比例以求真數也二十四與二十六分之五也二十四與十八四分之三也六分之五之二十較四分之三之十八多二六分之五之乙數較四分

之三之丙數却多八兩則二十四之與甲數二十之與乙數十八之與丙數其比例必皆若二與八也故八乘二除各得真數也

十則

帶分子母差分二法

設布一十二萬四千四百八十五疋給散軍士每三名給襖布七疋每四名給褲布五疋求軍數法曰列三名七疋于右四名五疋于左右上互乘左下得十五左上互乘右下得二十八並之共四十三為法另以左上右上

相乘得一十二以乘共布得一百四十九萬三千八百二十足以法除之得三萬四千七百四十名即所求

右 左
三名 四名
十二
七足 五足
二十八 十五

解曰十二為三名者四當給襖布二十八足為四名者三當給褲布一十五足是每軍士十二名給布四十三足也反之每給布四十三足得軍士一十二名也故十二乘四十三除得軍數也

十一則

互和遞減差分一法

設米一百八十石令甲乙丙三人遞減納之定甲多丙米三十六石求各應納米數法曰置共米以人數歸之得六十石為乙數另置甲多丙數折半得一十八石加乙數得七十八石為甲數減乙數得四十二石為丙數

解曰甲多于乙數必為甲多于丙數之半丙少于乙數亦必為丙少于甲數之半兩相折準是甲丙共得

三分之二而乙自得三分之一故三歸之得乙數加減之得甲與丙數也

十二則

互和遞減差分二法

設令甲乙丙丁四人遞減納銀定甲納六十九兩丁納五十一兩求乙丙應納數及共銀數法曰以丁數減甲數餘一十八兩三歸之得六兩加丁數得五十七兩為丙數加丙數得六十三兩為乙數並之共二百四十兩為共銀數

解曰甲多于乙乙多于丙丙多于丁三數並與甲多于丁數等故三歸得每率遞差之數凡四位以上皆取首尾兩數相減五位則四歸之六位則五歸之七位則六歸之即得每率遞差之數餘同前

十三則

匿價差分一法

設銀一百八十兩零二錢五分買麥六十五石菽二十五石麥每石多菽價一兩零七分求各價法曰置麥以麥多菽價乘之得六十九兩五錢五分以減元銀餘一百一十兩

零七錢並麥菽兩數除之得一兩二錢三分即菽價加麥多菽價得二兩三錢即麥價

解曰減去麥多菽價餘銀即菽九十石之共價故以九十石歸之得菽價

十四則

匿價差分二法

設稻一十八石稷二十二石其值適等交換五石則兩率差銀一兩六錢二分五釐求各價法曰置一兩六錢二分五釐以交換五石歸之得三錢二分五釐

以乘稻一十八石得五兩八錢五分另以稻一十八石減稷二十二石餘四石為法除之得一兩四錢六分二釐五毫即稷價另以三錢二分五釐乘稷二十二石得七兩一錢五分以前法除之得一兩七錢八分七釐五毫即稻價

解曰交換五石兩率相差一兩六錢二分五釐則一兩六錢二分五釐必稻五石多稷五石之價也以五歸之得三錢二分五釐即稻稷每石相差之價稻稷既每石相差三錢二分五釐則一十八石必差五兩

八錢五分矣今稷多稻四石而價適等是稷四石之價必五兩八錢五分也故四歸之得稷價又稻與稷價之比例原若十八與二十二既以三錢二分五釐乘稻一十八石得稷每四石之價則以三錢二分五釐乘稷二十二石必得稻每四石之價無疑矣故四歸之得稻價

十五則

二色差分

設銀六十七兩五錢共買稻菽一百石稻每石價八

錢菽每石價三錢求稻菽各若干法曰以菽價乘共一百石得三十兩以減原銀餘三十七兩五錢為實以兩價相減餘五錢為法除之得七十五石即稻數以減共一百石餘二十五石即菽數

解曰原銀為稻菽共百石之價以菽價乘百石為菽百石之價兩率不等者以稻貴于菽也令稻每石多菽價五錢是兩率每相差五錢百石內必有稻一石兩率相減餘銀三十七兩五錢凡為五錢者七十五故得稻七十五石也

十六則

三色差分（四色五色六色附）

設銀十兩零五錢共買稻麥菽一十八石稻每石價八錢麥每石價六錢菽每石價三錢求三色各若干

法曰置共糧以三歸之得六石為麥數以麥價因之得三兩六錢為麥共價另以麥數減共糧（餘一十二石）以菽價因之（得三兩六錢）另以麥共價減原銀（餘六兩九錢）兩數相減（餘三兩三錢）為實稻菽兩價相減（餘五錢）為法除之得六石六斗為稻數以稻麥兩數減共糧餘五石四斗

為蔱數

解曰若四色則四歸共物得若干即第二色數亦即第三色數以第二色價乘之得第二色共價以第三色價乘之得第三色共價以兩數減共物兩共價減原銀餘依二色差分法求之五色則五歸六色則六歸之倣此。按三色以上亦可與共物共價相合無差然實非一定不易之數即前三色論之設稻九石共價七兩二錢麥二石共價一兩二錢蔱七石共價二兩一錢亦與原銀共糧共價皆合而與上法所求

三色之數不同

十七則

貴賤和率差分

設銀一百二十七兩五錢共買稻麥一百零八石每稻三石價四兩每麥四石價三兩五錢求二色數及價各若干法曰列稻三石麥四石共稻麥一百零八石于右次列稻價四兩麥價三兩五錢原銀一百二十七兩五錢于左以右上互乘左中得十兩零五錢以左上互乘右中得一十六兩兩數相減餘五兩五錢為長法次

右　左

稻三石　四兩

麥四石　三兩五錢

對減餘五兩五錢

十六兩　十兩零五錢

一百零八石　一百二十七兩五錢

三百七十八兩　五百一十兩

對減餘一百三十二兩

以右中互乘左下得五百一十兩以左中互乘右下得三百七十八兩兩數相減餘一百三十二兩以長法除之得二十四為短法以稻三石乘短法得七十二石即稻數以稻價乘短法得九十六兩即稻共價以稻數減共稻麥一百零八石餘三十六石即麥數以稻共價減原銀一百二十七兩五錢餘三十一兩五錢即麥

共價

解曰此與前二色差分同但彼數齊此數不齊耳凡數之不齊者必假一數以齊之今稻三石麥四石則以十二齊之何為必齊之十二也十二為四倍稻三石三倍麥四石之數也以稻三乘麥價即得麥十二石之價以麥四乘稻價即稻十二石之價兩數相減為長法者即稻十二石多于麥十二石之銀數亦即稻四石多于麥四石之價又三倍之之數也以麥價乘共稻麥一百零八石即麥四百三十二石之價亦

即一百零八石盡皆為麥而又四倍其價之數也以麥四乘原銀即稻麥四百三十二石之共價亦即稻麥一百零八石之原價而又四倍之之數也兩數相減之餘即麥四百三十二石少于稻麥共四百三十二石之價實即稻七十二石多于麥七十二石之價又四倍之之數也以之為實若以稻四石多于麥四石之價除之必得稻七十二石今稻四石多于麥四石之價不可得止得稻十二石多于麥十二石之價為長法除實得二十四二十四者即為稻三石者二

十四也十二石三倍多于四石二十四三倍少于七十二石益法增若干倍得數即減若干倍也故為短法以稻三石乘之得稻數以稻價乘之得共稻價○若欲先得麥數則以稻三石乘元銀以稻價乘共稻麥數兩數相減以長法除之得數為短法以麥四石乘之得麥數以麥價乘之得共麥價解同前○

按此條當列稻三石價四兩共稻麥一百零八石于右列麥四石價三兩五錢共銀一百二十七兩五錢于左以左上互乘右中得一十六兩以右上互乘右中得十兩零五錢兩數相減餘五兩五錢為法次以左上右上相乘得一

右 左
稻三石 麥四石
十二
四兩 三兩五錢
五兩五錢
十六 十零五
一百零八 七兩五錢
一百二十
一千一百三十四兩
三百九十六兩
一千五百三十兩

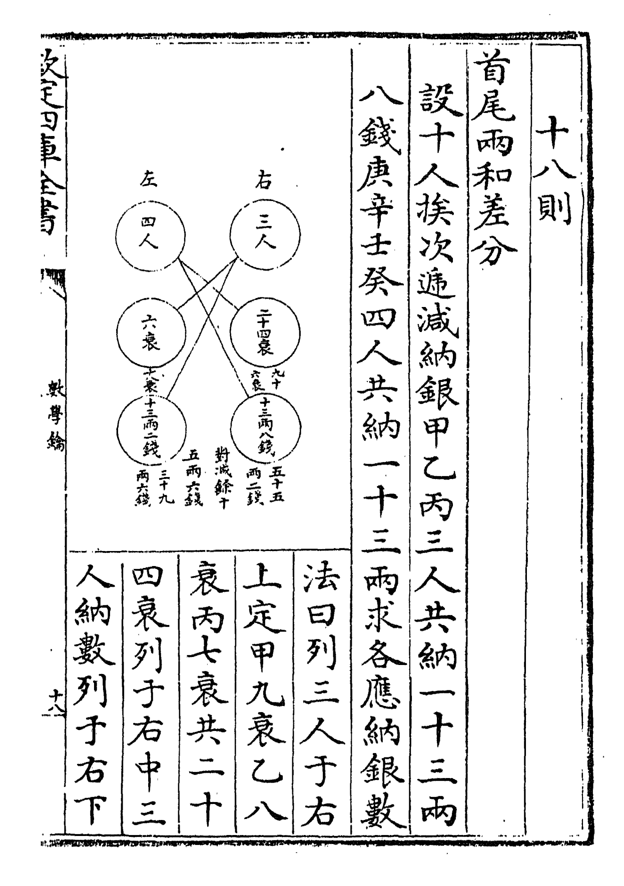
十二石以乘左下得一千五百三十兩以左中十兩零五錢乘右下得一千一百三十四兩兩數相減餘三百九十六兩為

實以法除之得七十二石即稻數似較舊法更捷○舊法以十二倍之法除四倍之實故止得二十四以稻三石乘之方得稻數後法以十二倍之法除十二倍之實故一除即得稻數無須再乘也

十八則

首尾兩和差分

設十人挨次遞減納銀甲乙丙三人共納一十三兩八錢庚辛壬癸四人共納一十三兩求各應納銀數



法曰列三人于右上定甲九衰乙八衰丙七衰共二十四衰列于右中三人納數列于右下

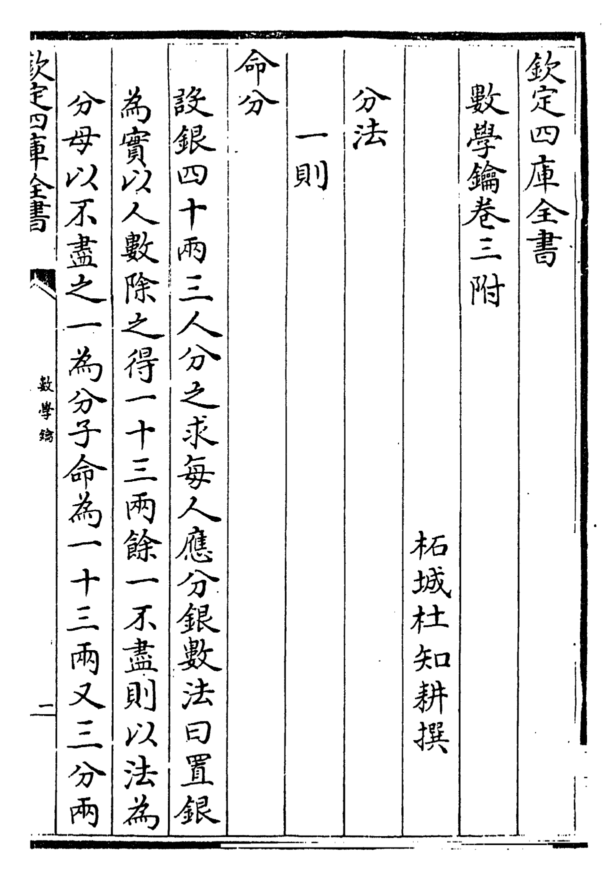
次列四人于左上定庚三衰辛二衰壬一衰共六衰列于左中四人納數列于左下先以右上偏乘左行中得一十八衰下得三十九兩六錢次以左上偏乘右行中得九十六衰下得五十五兩二錢以兩下對減餘一十五兩六錢為實兩中對減餘七十八衰為法除之得二錢為十人挨次遞減之數另以右上歸右下得四兩六錢為乙數加乙二錢得四兩八錢為甲數減乙二錢得四兩四錢為丙數減丙二錢得四兩二錢為丁數以下各遞減二錢得應納銀數

解曰首三人尾四人兩數不齊不可相減以求首尾

相差之數故互乘以齊之夫左下尾四人共納之銀數也以右上三人乘之得三十九兩六錢即三倍尾四人為一十二人之納數右下首三人共納之銀數也以左上四人乘之得五十五兩二錢即四倍首三人亦為一十二人之納數對減之餘即首十二人多于尾十二人之納數故以為實左中尾四人之衰數以右上三人乘之得十八即三倍尾四人為一十二人之衰數右中首三人之衰數以左上四人乘之得九十六即四倍首三人亦為一十二人之衰數對減

之餘即首十二人多于尾十二人之衰數故以為法以法除實所得非一衰之銀數而何一衰之銀數即十人挨次遞減之數也以右上三人歸右下納數即得乙數何也葢乙多于丙者即甲多于乙者也減甲之多補丙之少則成三平數乙居甲丙之中故三歸之得平數即得乙數也

數學鑰卷三下



欽定四庫全書

數學鑰卷三附

柘城杜知耕撰

分法

一則

命分

設銀四十兩三人分之求每人應分銀數法曰置銀為實以人數除之得一十三兩餘一不盡則以法為分母以不盡之一為分子命為一十三兩又三分兩

之一

解曰三分兩之一即三錢三分三三不盡

二則

約分

設以九十八為法除實不盡者四十二求約若干法曰以子四十二減母九十八餘五十六再減之餘一十四復以母十四減子四十二餘二十八再減之亦餘一十四謂之子母相同即以十四為法除母九十八得七除子四十二得三即命為七分之三

解曰母數九十八是七箇十四子數四十二是三箇十四九十八之與四十二若七之與三也故命為七分之三遇不可約之數直以本數命之如母九十七子四十二此數之不可約者也直命為九十七之四十二

三則

乘分

設一十八人分銀每人分得三百七十六兩又九分兩之六求共銀法曰置三百七十六兩為實以母九

因之得三千三百八十四兩加入子六共三千三百九十兩以人數乘之得六萬一千零二十兩再以母九歸之得六千七百八十兩即所求

解曰不以母因實則不能加入子數故因實以就子也

四則

課分

設有布二疋又九分疋之五用過一疋又六分疋之一求餘布法曰置用過布一疋以母六因之仍得六加

入子一共七又以原布母九因之得六十三另置原布二疋以母九因之得一十八加入子五共二十三又以用過布母六因之得一百三十八兩數相減餘七十五為實以兩母謂九與六相乘得五十四為法除之得一疋零二十一以約分法約之得十八之七即命為餘布一疋又十八分疋之七

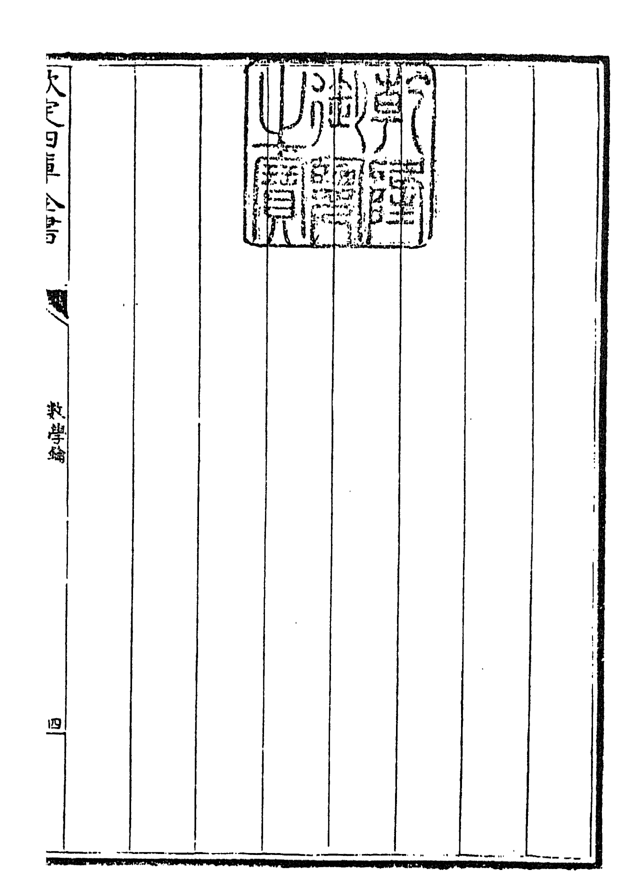
解曰兩數各帶子母不得不兩因之兩因之不得不兩歸之法以兩母相乘除實者與兩歸得數同也

五則

通分

設粟四十五石每七分石之五值銀八分兩之六求共銀法曰置粟為實以粟母七乘銀子六得四十二為法乘實得一千八百九十另以銀母八乘粟子五得四十為法除之得四十七兩二錢五分即所求

解曰原當置粟為實以粟母七乘之粟子五除之求得共粟七分之五再以銀子六乘之銀母八除之即得銀數然既以粟母七乘之又以銀子六乘之不如以粟母七乘銀子六以乘之也既以粟子五除之又以銀母八除之不如以銀母八乘粟子五以除之也



數學鑰卷三附

欽定四庫全書

子部

數學鑰卷四

詳校官欽天監博士臣張尚鑑

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官進士臣朱鈐

校對官五官靈臺郎臣陳際新

謄録監生臣戚世

數學鑰卷四凡例

柘城杜知耕撰

凡例

一則

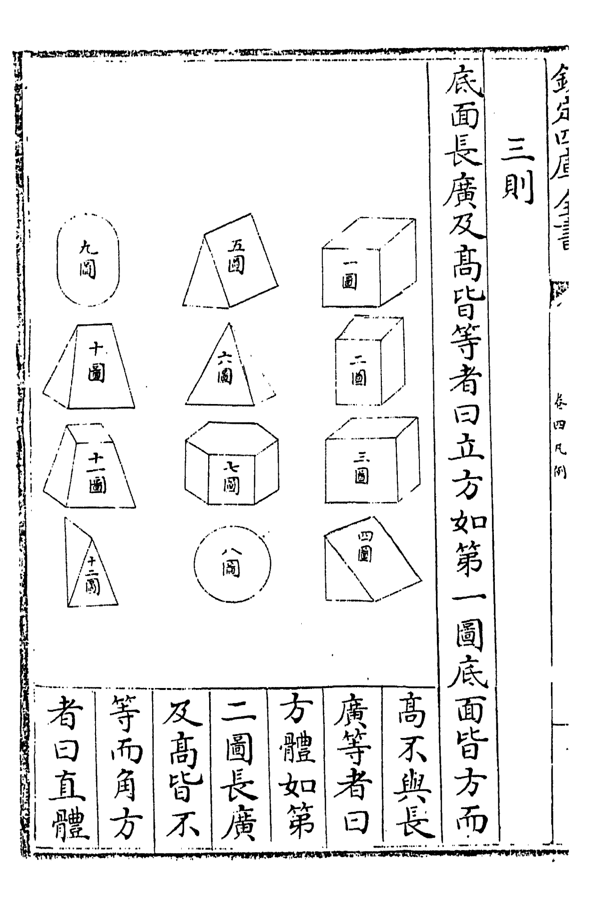
形為體之界在上之界曰面在下之界曰底底與面有長廣而無厚薄故底面之積曰平積

二則

體之縱者曰長衡者曰廣立者曰高

三則

底面長廣及高皆等者曰立方如第一圖底面皆方而高不與長廣等者曰方體如第二圖長廣及高皆不等而角方者曰直體



亦曰直方體如第三圖底或方或直而傍爲勾股形曰塹堵如第四圖底或方或直而傍爲三角形曰芻薨如第五圖底或方或圓或多邊而上銳至盡者曰錐體如第六圖凡底面相等者即取底之形爲體之名設底六邊即爲六邊體如第七圖渾然無界無稜者曰渾體渾圓如第八圖渾撱圓如第九圖面長殺于底長而無廣者曰銳脊如第十圖面之長廣各殺于底者曰銳面如第十一圖上下皆有長無廣者曰鼈臑如第十二圖

錐及鋭面等體自傍科量之度非正高五邊七邊等底中長折半之點非正心

四則

五則

線之度尺容十寸寸容十分形之度尺容百寸寸容百分體之度尺容千寸寸容千分

六則

相似兩形之比例為線與線再加之比例再加者謂兩線各自乘以為比例也相似兩體之比例為線與線

三加之比例三加者謂兩線各自乘再乘以為比例也兩形有一度等者同兩線之比例兩體有一度等者同兩形之比例兩體有兩度等者亦同兩線之比例

七則

堆止一層曰平堆二層以上曰高堆

數學鑰卷四凡例

數學鑰卷四目録

栢城杜知耕撰

少廣

數學鑰卷四目録

數學鑰卷四

柘城杜知耕撰

少廣

一則

立方求積

設立方方三尺求積法曰置三尺自乘得九尺再以三尺乘之得二十七尺即所求

解曰算體之法先求底積即方圓等形求積詳一二卷以高為底

積倍數如圖長廣各三尺相乘得九尺為底積若高二尺則二倍底積之數得一十八尺高三尺則三倍底積之數得二十七尺

二則

直體求積

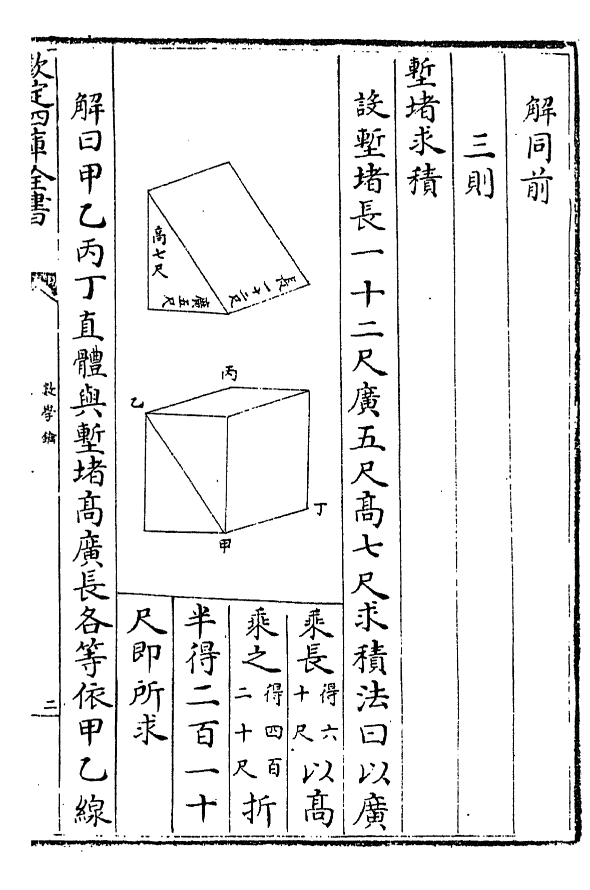
設直體長七尺廣五尺高一十二尺求積法曰以廣乘長得三十五尺以高乘之得四百二十尺即所求

解同前

三則

塹堵求積

設塹堵長一十二尺廣五尺高七尺求積法曰以廣



乘長得六十尺以高乘之得四百二十尺折半得二百一十尺即所求

解曰甲乙丙丁直體與塹堵高廣長各等依甲乙線

丙乙稜分之必成二塹堵夫一直體既能當二塹堵則一塹堵必當半直體也故折半得積

四則

芻甍求積

設芻甍長一十二尺廣五尺高七尺求積法同塹堵

高七尺
長十二尺
廣五尺

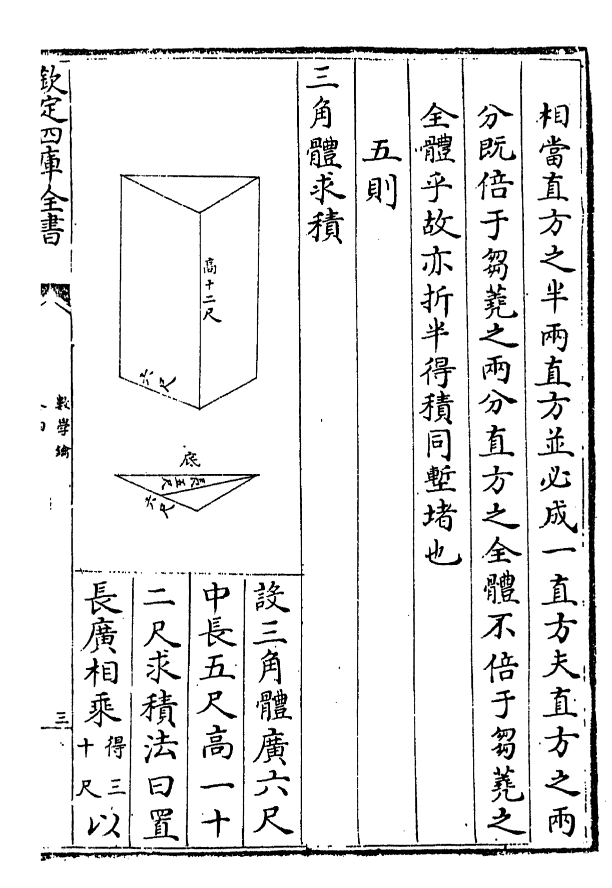
戊 庚 巳 丙 甲 丁 乙

解曰甲乙丙戊芻甍依丙丁線丙戊脊分之必成二塹堵各為

相當直方之半兩直方並必成一直方夫直方之兩分既倍于芻甍之兩分直方之全體不倍于芻甍之全體乎故亦折半得積同塹堵也

五則

三角體求積



設三角體廣六尺中長五尺高一十二尺求積法曰置長廣相乘得三十尺以

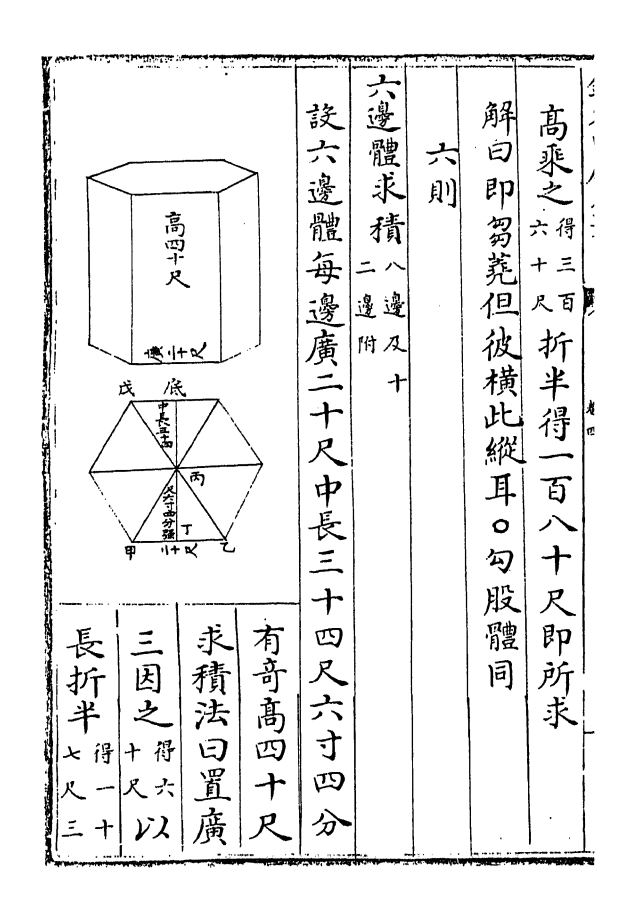
高乘之得三百六十尺折半得一百八十尺即所求

解曰即芻甍但彼橫此縱耳○勾股體同

六則

六邊體求積八邊及十二邊附

設六邊體每邊廣二十尺中長三十四尺六寸四分有奇高四十尺



求積法曰置廣三因之得六十尺以長折半得一十七尺三

寸二分零二毫乘之得一千零三十九尺二寸一分二釐為底積再以高乘之得四萬一千五百六十八尺四寸八分即所求

解曰六邊底依各角分之成三角形六三角求積法以廣乘長折半一卷五則不折則得兩三角積故三因邊廣以底長之半乘之底之半長即三角之中長即得六三角積即全底積猶平圓半徑乘半周之義也二卷三則若無底長之度則取邊廣為弦全底分為六三角形每形之三邊俱等以甲乙為弦即以丙乙為弦也半廣為勾丁乙各自乘相減平方開之得股丙丁即底長之半六卷二則○設八邊底每邊廣二十尺求底長即以

二十尺折半為勾乙丁另置二十尺以七六五三六除之得二六一三一四強為弦丙乙各自乘相減平方開之得股丙丁即底長之半設十二邊底每邊廣二十尺求底長即以二十尺折半為勾丁乙另置二十尺以五一七六四除之得三八六三六八強為弦丙乙各自乘相減平方開之得股丙丁即底長之半按七六五三六乃四十五

度弧之通弦四十五度為三百六十度八之一故以之除八邊底之一邊即得外切圓形之半徑五一七六四乃三十度弧之通弦三十度為三百六十度十二之一故以之除十二邊底之一邊即得外切圓形之半徑外切圓形之半徑即三角形之腰線也見丙乙大

測及八線表

七則

五邊體求積

設五邊體每邊廣二十尺中長三十尺零七寸七分

六釐六毫強高四十尺求積法曰置邊廣以邊數五因之（得一百尺）

高四十尺
邊二十尺
底
中長三十尺零
七寸有奇
丙
甲 丁 乙

折半（得五十尺）為實另置邊廣折半（得十尺）自乘（得一百尺）以中長除之（得三尺二寸四分九釐一毫強）與中長相減（餘二十七尺五寸二分七釐四毫強）折半（得一十三尺七寸六分三釐七毫強）為法乘實（得六百八十八尺一寸八分八釐）為底積再以高乘之得二萬七千五百二十七尺五寸二分即所求

解曰五邊底依各角分之成三角形五欲求底積必先得三角積欲求三角積必先得三角之中長丙丁然上則六邊邊為偶數角與角相對邊與邊相對其全底之長即相對兩三角之中長令五邊邊為奇數邊與角相對其底長巳丁小半為此三角之中線丙丁大半為彼三角之腰線巳丙折半則得庚丁不能得丙丁也若欲得丙丁必先求巳丙于巳丁底長減去巳丙餘即丁丙欲得巳丙必先求外切圓形

之巳戊徑巳戊折半即巳丙欲得巳戊必先求外切圓徑大

于底長之丁戊底長加丁戊即巳戊欲求丁戊則用弧矢以弦

及餘徑求矢法二卷二十二則今邊廣甲戊乙弧矢形之甲

乙弦也邊廣折半自乘丁乙半弦上方形也底長巳

丁餘徑也以除半弦上方形所得者丁戊矢也以矢

減底長所餘者倍三角中長之辛丁也故半之為三

角之中長又五因邊廣折半者取五三角底之半也

若無底長之度則取邊廣折半為勾丁乙另置邊廣以

一一七五五八除之得一七零一二八八為弦丙乙各

自乘相減平方開之得股丙丁即三角形之中長六卷二則

一一七五五八乃七十二度弧之通弦七十二度為三百六十度五之一故以之除五邊之一即得外切圓形之半徑丙乙為三角形之腰線也○設九邊底每邊廣二十尺求三角分形之中長則以二十尺折半為勾丁乙另置二十尺以六八四零四除之得二九二三八為弦丙乙自乘相減平方開之得股丙丁即三角形之中長六八四零四

乃四十度弧之通弦四十度為三百六十度九之一故以之除九邊之一即得三角形之腰線也

八則

圓體求積

高四十尺

徑三十尺

設圓體徑三十尺高四十尺求積法曰置徑自乘得九百尺再以高乘之得三萬六千尺用圓法十一乘十四除二卷四則得二萬八

千二百八十五尺七寸有奇即所求

解曰以徑自乘再以高乘之方體積也方體與圓體等高則兩體即若兩底之比例故用平圓法求圓體之積也

九則

撱圓體求積

設撱圓體大徑三十六尺小徑一十六尺高四十尺

求積法曰置兩徑相乘得五百七十六尺再以高乘之得二萬三千零四十尺用圓法十一乘十四除得一萬八千一百零

二尺八寸有奇即所求

解同前則及二卷十六則

高四十尺

底

大徑三十尺

十則

弧矢體求積

設弧矢體矢闊八尺六寸六分零二毫弦長三十尺背三十六尺二寸九分零三毫六絲高四十尺求積

法曰置半弦自乘（得二百二十五步）以矢除之（得二十五尺九寸八分零

高四十尺
背三十六尺二寸九分零三毫六絲
矢八尺六寸六分零二毫
弦三十尺

九毫強為餘徑餘徑加矢折半得一十七尺三寸二分零五毫五絲為法乘背得六百二十八尺五寸六分九釐另以餘徑減矢折半得八尺六寸六分零四毫弱為法乘弦得二百五十九尺八寸一分二釐兩數相減餘三百六十八尺七寸五分七釐折半得一百八十四尺三寸七分八釐為底積再以高乘之得七千三百七十五尺一寸四分即所求二卷十七則

十一則

錐體求積

設方錐方二十尺高四十尺求積法曰置二十尺自乘得四百尺為底積再以高乘之得一萬六千尺以錐法三歸之得五千三百三十三尺三寸三分有奇即所求

高四十尺
二十尺
二十尺
底
二十尺
二十尺
二十尺
二十尺

解曰方邊自乘再以高乘之方體也方錐居方體三之一故三歸得積也何以知方錐居體三之一也試

作立方如甲乙自心至各稜分之必成錐體六俱以方面為底方邊之半為高更作一方體與錐體同底等高如丙丁丙丁方體既與錐體同

底必亦與甲乙立方同底既與錐體等高必以甲乙
方邊之半為高兩方體既同底則兩體之比例若高
與高丙丁體必為甲乙立方二之一矣錐體既為甲
乙立方六之一不為等高同底丙丁方體三之一乎
再作直體廣二尺長四尺高八尺如癸辛亦自心至
各稜分之亦成錐體六底等戊庚辛巳高等辛子之
半如丑者二底等癸壬庚戊高等庚辛之半如寅者
二底等庚壬子辛高等辛巳之半如卯者二六錐體
形勢雖殊而俱等何也丑與寅同長丑之高倍于寅

而寅之廣倍于丑折寅之廣準丑之高則丑寅二體等矣又丑與卯同廣丑之長倍于卯而卯之高倍于丑折丑之長準卯之高則丑卯二體亦等矣夫寅等于丑丑等于卯是六錐俱等矣今癸辛一直體能分為相等之六錐體則一錐體不為癸辛直體六之一乎錐體既為同底倍高直體六之一必為同底等高三之一無疑矣○從此推之不論方圓多邊弧矢凡屬錐體者皆為同底等高體三之一

十二則

諸雜線體求積

凡體先求底積底屬直線依一卷九則例屬曲線及雜線依二卷四十則例裁之得底積再以高乘之即得體積

十三則

渾圓求積

設渾圓徑十尺求積法曰置徑自乘得一百尺四因之得四百十一乘十四除得三百一十四尺二寸八分六釐弱為面積再以半徑乘之得一千五百七十一尺四寸三分弱以三歸之得五百二十三

徑十尺

尺八寸一分即所求

解曰置徑自乘再以十一乘十十四除者渾圓中丙子乙丑平圓積也以四因之者渾圓面積當平圓積四也何也渾圓面任割一分如甲丁己戊欲求面分之容則取自甲頂至戊界之度甲戊線為半徑作平圓如辛癸平圓辛壬與甲戊等其容即等若自乙丙平割渾圓之半取自甲頂至乙界之度為半徑作平圓其容必與渾圓半面等今丙子乙丑平圓半徑為乙庚乙庚

與甲庚等乙庚甲庚兩線偕甲乙線則成一勾股形甲乙為弦乙庚甲庚一為勾一為股也以弦為半徑之平圓必倍大于或勾或股為半徑之平圓渾圓半面既等于以甲乙弦為半徑之平圓不倍大于以乙庚勾為半徑之丙子乙丑平圓乎半面既倍大于丙子乙丑平圓全面不四倍大于丙子乙丑平圓乎法以半徑乘之以三歸之又何也

平圓求積同于以圓周為底以半徑為高之三角形二卷四則故渾圓求積同于以全面為底以半徑為高之錐體以高乘底以三歸之者錐體求積之法也本卷十一則又嘗借西洋割圓八線表考之如前徑十尺之渾圓自頂中剖之再以乙丙線平分之依八線表例分乙丁甲曲線為九十度設任割球分為甲丁巳戊其甲丁曲線三十度自丁戊向甲截作三十段梯形于八線表

中求三十度通弦得五尺二十九度通弦得四尺八寸四分八釐一毫用梯形求積法一卷七則並兩數折半得四尺九寸二分四釐零五絲再求二十八度通弦得四尺六寸九分四釐七毫與二十九度通弦並而折半得四尺七寸七分一釐四毫依次折盡三十度共得通弦數七十六尺七寸五分九釐七毫五絲用圓徑求周法二卷一則求得二百四十一尺二寸四分五釐弱為球分面上三十段梯形兩濶折半之數為實復求甲丁曲線三十分之一得八分七釐三毫有奇取渾圓全周以三十六歸之即得為

梯長乘實得割球面積二十一尺零五分有奇另求甲戊直線得二尺五寸八分八釐二毫即表中十五度通弦倍之得五尺一寸七分六釐四毫為徑求圓積亦得二十一尺零五分有奇與前數合

又法置徑自乘再以徑乘之得一千尺以十一乘二十一除得數同

解曰圓體與方體等高則兩體之比例若兩底之比例是方體與圓體若十四與十一也又圓體與渾圓等高令圓體之底同渾圓中心之平圓則圓體之容

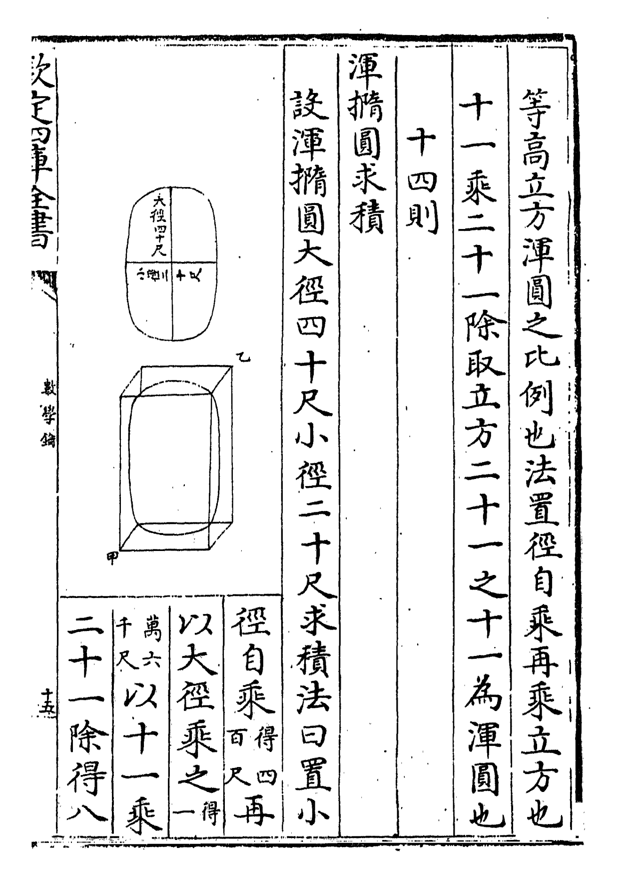
必等于以平圓為底以渾圓半徑為高渾圓半徑即圓體高度之半也之錐體六本卷十一則渾圓之面既四倍于中心平圓而渾圓求積之法又同錐體則渾圓之容必等于以平圓為底半徑為高之錐體四夫以相等之錐體圓體得六而渾圓得四是圓體與渾圓若六之與四六之與四即三之與二也又以三因十四得四十二以二因十一得二十二各以二約之為二十一與十一則二十一與十一即

等高立方渾圓之比例也法置徑自乘再乘立方也十一乘二十一除取立方二十一之十一為渾圓也

十四則

渾撱圓求積

設渾撱圓大徑四十尺小徑二十尺求積法曰置小徑自乘得四百尺再以大徑乘之得一萬六千尺以十一乘二十一除得八



千三百八十尺零九寸五分即所求

解曰小徑自乘再以大徑乘之甲乙方體也方體渾橢圓比例亦猶立方與渾圓故十一乘二十一除得渾橢圓之積

十五則

銳脊體求積

設銳脊體脊長十尺底長十四尺廣五尺高十二尺求積法曰倍底長加脊長得三十八尺以廣乘之得一百九十尺再以高乘之得二千二百八十尺以六歸之得三百八十尺即

所求

解曰依甲丙乙丁兩線分之成芻甍一斜錐二（斜錐與正錐同論）芻甍以高乘底積之半得積（本卷四則）錐以高乘底積三之一得積（本卷十一則）夫芻甍之底長即銳脊之脊長也若三倍脊長以六歸之即得芻甍底長之半又兩斜錐之底長即銳脊之脊長與底長之較也（即戊庚己辛兩線並之度）若二倍較線以六歸之即得斜錐底長三之一今倍底長加脊

長非即三倍脊長二倍較線乎以六歸之以廣乘之再以高乘之得三分體之積即全體之積法先乘後歸亦異乘同除之意也

十六則

鼈臑求積

高九尺

丙

甲

乙

設鼈臑上長二尺下長四尺高九尺求積法曰

置兩長相乘得八

尺再以高乘之得七十二尺以六歸之得一十二尺即所求

解曰另作一芻甍如下圖芻甍原為等高同底方體二之一本卷四則依甲丙乙丙兩線各從底稜分之成一錐體二鼈臑錐體原為等高同底方體三之一本卷十一則必為芻甍三之二于芻甍內減去錐體所餘三之一則兩鼈臑也兩鼈臑並既為芻甍三之一必為與芻甍等高同底方體六之一矣與芻甍等高同底即為鼈臑等高倍底者也兩鼈臑既為等高倍底方體

六之一則一鱉臑亦必為等高同底方體六之一故用六歸也

十七則

等廣鋭面體求積

設等廣鋭面體面長四尺底長一十二尺底面俱廣五尺高一十二尺求積法曰並兩長折半得八尺以廣乘之得四十尺

再以高乘之得四百八十尺即所求

解曰依甲丙乙丁兩綫分之成一直體二塹堵全面即一直體底全底即一直體二塹堵底底面並而折半則成一直體一塹堵底矣夫直體以高乘本底得積本卷二則塹堵以高乘半底得積本卷三則令一塹堵之全底即兩塹堵之半底也故以高乘底面相並折半之數得全積

十八則

鋭面方體求積

設鋭面方體面方六尺底方八尺高一十二尺求積

上方六尺
高一十二尺
下方八尺

乙　己　丁　丙　戊　甲

法曰置上方自乘得三十六尺下方自乘得六十四尺上下兩方相乘得四十八尺三數並共一百四十八尺以高乘之得一千七百七十六尺以三歸之得五百九十二尺即所求

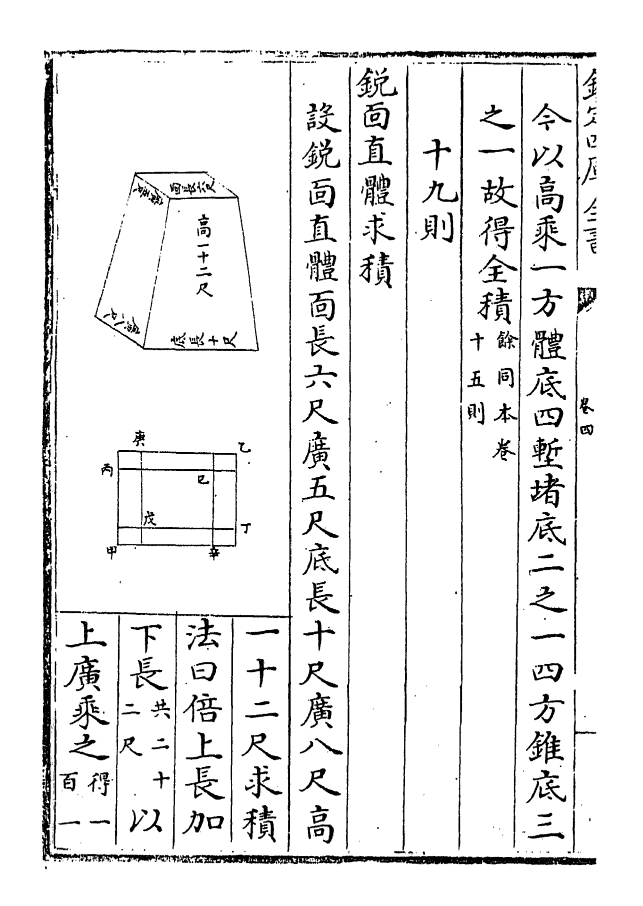
解曰各依面稜分之成方體一塹堵方錐各四凡九體而有三等三等求積之法則各殊方體以高乘底得積本卷二則塹堵以高乘底二之一得積本卷三則方錐以

高乘底三之一得積本卷十一則　若從方體則與塹堵不合從塹堵又與方錐不合不得不用三歸以就方錐然用三歸必三倍方體之底半倍塹堵之底而後可令下方自乘即甲乙方形得方體之底一塹堵方錐之底各四上方自乘即丙丁方形得方體之底一上下相乘即戊己直形得方體之底一塹堵之底二合三形共方體底三塹堵底六方錐底四夫方體底三三歸之仍得一塹堵底六三歸之得二二塹堵底即四塹堵底二之一也方錐底四三歸之各得三之一

令以高乘一方體底四塹堵底二之一四方錐底三之一故得全積餘同本卷十五則

十九則

銳面直體求積



設銳面直體面長六尺廣五尺底長十尺廣八尺高一十二尺求積

法曰倍上長加下長共二十二尺以上廣乘之得一百一

十尺另倍下長加上長共二十六尺以下廣乘之得二百零八尺兩數並得三百一十八尺以高乘之得三千八百一十六尺以六歸之得六百三十六尺即所求

解曰依各面稜分之亦成九體與前則同但四塹堵兩兩相等辛戊與庚巳等丙戊與丁巳等四塹堵既不等則三歸之法不可用矣于是有六歸之法倍上長加下長以上廣乘之即戊巳直形二丙丁直形一得戊巳直體底三丙戊巳丁塹堵底各一倍下長加上長以下廣乘之即甲乙直形二辛庚直形一得戊

巳直體底三辛戊庚巳塹堵底各三丙戊丁巳塹堵底各二甲戊等四錐底各二合之共直體底六塹堵底十二與辛戊等者六與丙戊等者六錐底八以六歸之得一直體底四塹堵底二之一四錐底三之一故以高乘之得全積○按鋭面直體亦有可用三歸者如後圖面長五尺廣三尺底長七尺廣四尺二寸高一十二尺用前法得積二百六十一尺六寸今以面廣乘面長得一十

五尺以底廣乘底長得二十九尺四寸以面廣乘底長得二十一尺（或以底廣乘面長亦同）三數並共六十五尺四寸以高乘之以三歸之得積同用此法求前體則不合其故何也葢前體乃銳脊之截體後體乃直錐之截體後體底面長廣可互為比例若依四角斜線引而高之必成直錐是以謂之直錐之截體依前例分為九體其四塹堵雖體勢不同而容積皆等故用三歸而合也若前體底面長廣不可為比例亦依四角斜線引而高之止成銳脊終不成錐體是以謂之銳

脊之截體如前分為九體其四塹堵體勢既異而大小復殊故用三歸必不合也鋭面直體有此二等不可不知也

二十則

鋭面圓體求積

高一十二尺

設鋭面圓體面徑六尺底徑八尺高一十二尺求積法曰置面徑自乘得三十六尺底徑自乘得六十四尺兩徑相乘得四十八尺三數並共一

百四十八尺以高乘之得一千七百七十六尺再十一乘四十二除

得四百六十五尺一寸四分有奇即所求

解曰此與銳面方體法同元當用三歸得銳面方體積再十一乘十四除為本積今用十一乘四十二除者以三因十四得四十二以四十二除猶三歸又十四除也

二十一則

銳面撱圓體求積

設銳面撱圓體面大徑四尺小徑二尺底大徑八尺

小徑六尺高一十二尺求積法曰倍面大徑加底大徑以面小徑乘之（得三十二尺）另倍底大徑加面大徑以底小徑乘之（得一百二十尺）

高一十二尺

兩數並（共一百五十二尺）以高乘之（得一千八百二十四尺）再以十一乘八十四除得二百三十八尺八寸五分有奇即所求

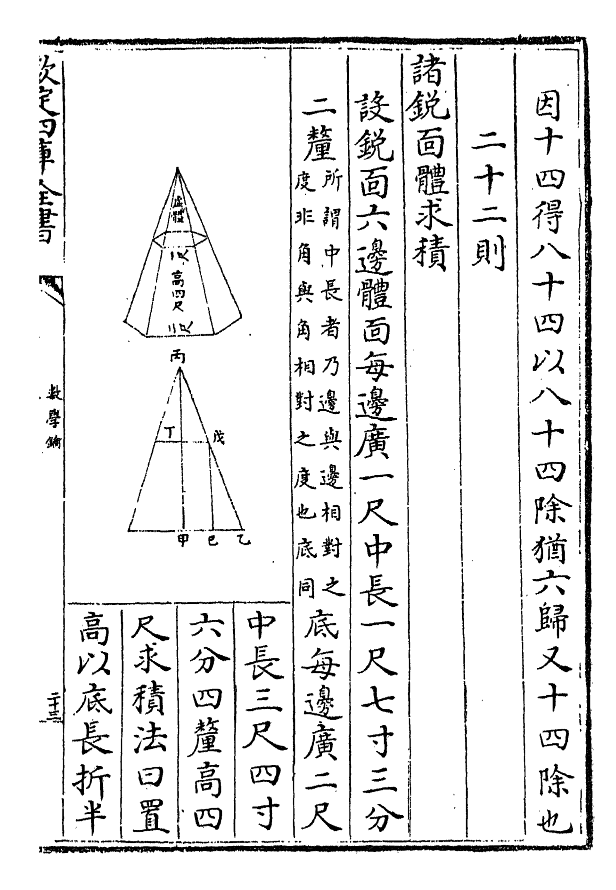
解曰此與銳面直體法同元當用六歸得銳面直體積再十一乘十四除為本積今以八十四除者以六

因十四得八十四以八十四除猶六歸又十四除也

二十二則

諸銳面體求積

設銳面六邊體面每邊廣一尺中長一尺七寸三分二釐所謂中長者乃邊與邊相對之度非角與角相對之度也底同底每邊廣二尺中長三尺四寸六分四釐高四尺求積法曰置高以底長折半



乘之得六尺九寸二分八釐以兩長相減折半得八寸六分六釐六除之得八尺為錐高另三因底邊二尺得六尺以底長之半乘之得十尺零三寸九分二釐以錐高八尺乘之三歸之得二十七尺七寸一分强為錐積另三因面邊一尺得三尺以面長之半乘之得二尺五寸九分八釐以原高減錐高餘四尺乘之三歸之得三尺四寸六分四釐為虛積以虛積減錐積餘二十四尺二寸四分八釐即所求

解曰凡銳面體底面長廣能為比例者皆諸錐之截體既得錐積復得體外虛積相減之餘即為所求之

實積然欲求錐積必先求錐高錐高甲丙與元高甲丁之比例若底長之半甲乙與底面兩半長之較線已乙也法以底長之半乘高以兩半長之較線除之者乃借乙已與已戊之比例已戊甲丁即因甲乙以求甲丙也凡銳面體俱同此法

二十三則

求錐體之正高

設方錐底方十尺斜高一十三尺求正高法曰置斜高自乘得一百六十九尺另以底方折半自乘得二十五尺兩數相

減餘一百四十四尺平方開之得一十二尺即所求

解曰此勾弦求股法也六卷二則凡求諸錐體之積須得諸錐正高

斜高一十三尺

底方十尺

自傍面量者乃斜高非正高也自頂至底中心方為正高方錐係偶邊故折底長為勾如遇奇邊則求底中心至邊之度為勾本卷七則

二十四則

立方以積求邊一法即開立方

設立方積三千三百七十五尺求方邊法曰置積于中為實先商十尺于左下法亦置十尺于右自乘再乘得一千尺除實餘二千三百七十五尺三因下法十尺得三十尺為方法次商五尺置于左初商十尺之次下法亦置五尺于初商十尺之次共一十五尺以次商五尺徧乘之得七十五尺為廉法再以方法乘廉法得二千二百五十尺除實餘一百二十五尺又置次商五尺自乘再乘得一百二十五尺為隅法除實恰盡合左初商次商得一十五尺即所求

解曰初商自乘再乘大方積也次商五尺乘下法十

尺得五十尺即方廉甲乙丙丁一側面之平積也丁乙五尺丁丙十尺相乘得五十尺以初商乘之必得一方廉之積每一方廉積五百尺若以方法三十尺乘之則得三

方廉之積三方廉皆等又以次商五尺乘下法五尺得二十五尺即戊巳庚辛長廉一方面之平積也戊巳五尺戊庚亦五尺相乘得二十五尺以初商乘之必得一長廉之積每一長廉積二百五十尺若以方法三十尺乘之則得三長廉之積三長廉皆等令以次商五尺徧乘下法十五尺得七十五尺即方廉之側面長廉之方面兩平積也總以方法三十尺乘之即得三方廉三長廉之共積矣又次商五尺自乘再乘得一百二十五尺即隅方積以三方廉附于大方之三面以三長廉補方廉之缺又以一隅方

補長廉之缺八體凑合則成一縱廣皆一十五尺之立方矣

二十五則

立方以積求邊二法

設立方積三百六十五萬二千二百六十四尺求方邊法曰置積于中為實先商一百尺于左下法亦置一百尺于右自乘再乘得一百萬尺除實餘二百六十五萬二千二百六十四尺三因下法一百尺得三百尺為方法次商五十尺置于左初商一百尺之次下法亦置五十尺于初商一

百尺之次（共一百五十尺）次商五十尺徧乘之（得七千五百尺）為廉法以方法乘廉法（得二百二十五萬尺）除實（餘四十萬零二千二百六十四尺）又以次商自乘再乘（得一十二萬五千尺）為隅法除實（餘二十七萬七千二百六十四尺）復三因下法一百五十尺（得四百五十尺）為方法三商四尺于左初商次商一百五十尺之次下法亦置四尺于初商次商一百五十尺之次（共一百五十四尺）以三商四尺徧乘之（得六百一十六尺）又為廉法以方法乘廉法（得二十七萬七千二百尺）除實（餘六十四尺）又以三商四尺自乘再乘（得六十四尺）為隅法除實恰盡合左初次三商共得一

百五十四尺即所求

解曰此與前則同但彼二位此三位耳設三商又不盡復三因初次三商為方法四商之倣此

二十六則

方體以積求邊一法即帶縱開立方

設方體積二千九百二十五尺長廣相等高朒二尺求各度法曰置積于中為實初商十尺自乘又以朒二尺減十尺餘八尺乘之得八百尺除實餘二千一百二十五尺倍八尺加初商十尺共二十六尺為方廉法又倍初商十尺

加八尺共二十八尺為長廉法次商五尺置于初商之次以初商十尺乘方廉法得二百六十尺以次商五尺乘長廉法得一百四十尺兩數並共四百尺以次商五尺乘之得二千尺除實餘一百二十五尺又置次商五尺自乘再乘得一百二十五尺為隅法除實恰盡合初商次商共得一十五尺即底方之度減高朒二尺餘一十三尺即高度

解曰初商自乘大方之底積又減二尺乘之高朒于縱及廣也倍八尺加十尺為方廉法者以方廉廣十尺者一廣八尺者二也又以十尺乘之者三方廉之

長皆十尺也倍十尺加八尺為長廉法者以長廉長八尺者一長十尺者二也又以次商五尺乘之者三長廉之廣皆五尺也又並六廉以五

尺乘之者六廉之厚皆五尺也餘同前則○改設前
積為三千二百四十三尺三寸七分五釐初商十尺
次商五尺仍餘積三百一十八尺三寸七分五釐又
以朐二尺減初次兩商十五尺餘十三尺倍之加十
五尺共四十一尺為方廉法倍十五尺加十三尺共
四十三尺為長廉法三商五寸于初次兩商一十五
尺之次以初次兩商十五尺乘方廉法得六百一十
五尺以三商五寸乘長廉法得二十一尺五寸並兩
數共六百三十六尺五寸又以三商五寸乘之得三

百一十八尺二寸五分除實餘一寸二分五釐陛二位作一百二十五寸又置三商五寸自乘再乘得一百二十五寸除實恰盡合初次三商得一十五尺五寸為底方之度減高朒二尺餘一十三尺五寸為高度〇餘積一寸二分五釐陛二位何也葢體以縱廣及高各一尺為積一尺一尺實積千寸取十分尺之一為寸是一寸而實積百寸也故寸以下皆陛二位

二十七則

方體以積求邊二法

設方體積四千二百七十五尺長廣相等高多四尺求各度法曰置積于中為實初商十尺自乘又以多四尺並十尺共十四尺乘之得一千四百尺除實餘二千八百七十五尺倍十四尺加初商十尺共三十八尺為方廉法倍初商十尺加十四尺共三十四尺為長廉法次商五尺置于初商之次以初商十尺乘方廉法得三百八十尺以次商五尺乘長廉法得一百七十尺兩數並共五百五十尺又以次商五尺乘之得二千七百五十尺除實餘一百二十五尺又置次商五尺自乘再乘得一百二十五尺為隅法除實恰盡合初次兩商共得一十

五尺即底方之度加高多四尺共一十九尺即高度

解同前

二十八則

直體以積求邊一法

設直體積七千二百尺高一十二尺廣朒于長十尺求長廣法曰置積以高除之得六百尺四因之得二千四百尺另置廣朒于長十尺自乘得一百尺兩數並平方開之得五十尺減廣朒于長十尺餘四十尺折半得二十尺即廣加十尺得三十尺即長

解曰以高除積所得者直體底積也故平方帶縱開之即得所求也

二十九則

直體以積求邊二法

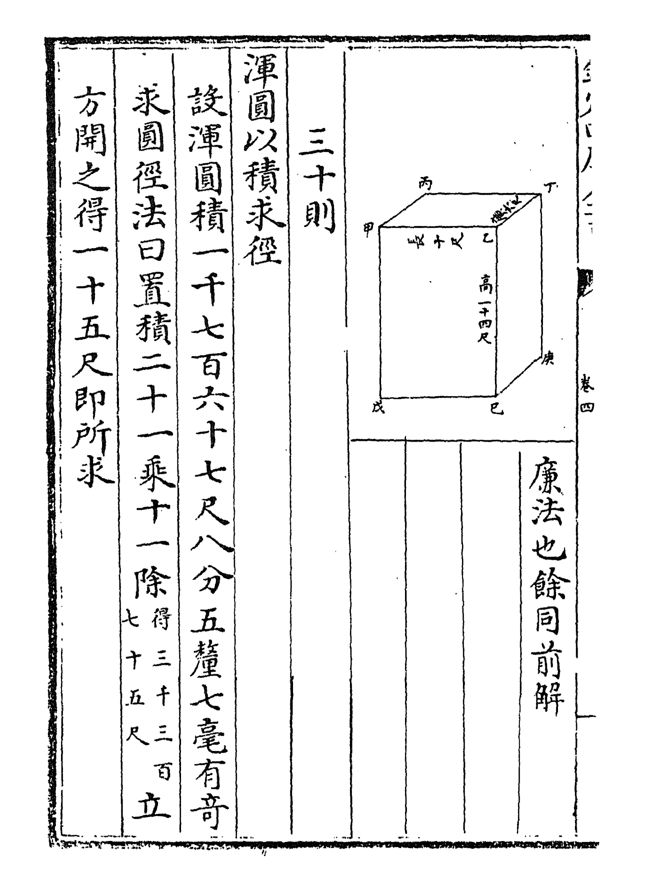
設直體積三千一百三十五尺高多長四尺長多廣四尺求各度法曰置積于中爲實初商十尺以十尺減長多廣四尺餘六尺乘之又以十尺加高多長四尺共十四尺乘之得八百四十尺除實餘二千二百九十五尺列十尺六尺十四尺爲方廉法並十尺六尺十四尺共三十

尺為長廉法次商五尺置于初商之次方廉法維乘以六尺乘十尺（得六十尺）十尺乘十四尺（得一百四十尺）十四尺乘六尺（得八十四尺）並之（共二百八十四尺）又以次商五尺乘長廉法（得一百五十尺）兩數並（共四百三十四尺）再以次商五尺乘之得二千一百七十尺除實（餘一百二十五尺）又置次商五尺自乘再乘得一百二十五尺為隅法除實恰盡合初次兩商共一十五尺即長增四尺共一十九尺即高減長四尺餘一十一尺即廣

解曰初商十尺為大方之長減四尺餘六尺為廣增

四尺共一十四尺為高故兩乘得大方積大方三面之平積即三方廉之底積也而大方之三面各不等以廣六尺乘長十尺得甲乙丙丁面平積以長十尺乘高一十四尺得戊巳甲乙面平積以高一十四尺乘廣六尺得巳庚乙丁面平積故列三位為方廉法維乘也又大方三稜之度即三長廉之高也而大方三稜亦不等甲乙稜十尺乙丁稜六尺乙巳稜一十四尺故並三數為長

廉法也餘同前解



三十則

渾圓以積求徑

設渾圓積一千七百六十七尺八分五釐七毫有奇

求圓徑法曰置積二十一乘十一除得三千三百七十五尺立方開之得一十五尺即所求

解曰十一與二十一渾圓立方之比例也（本卷十三則）二十一乘十一除令渾圓化為相當之立方故立方開之得方邊即得圓徑也

三十一則

渾撱圓以積求徑

設渾撱圓積二千二百三十九尺二寸八分五釐有奇大徑多小徑四尺求兩徑法曰置積二十一乘十一除（得四千二百七十五尺）以帶縱立方開之得一十五尺即小徑加多四尺得一十九尺即大徑

解曰渾揹圓與方體之比例亦若渾圓與立方故二十一乘十一除帶縱立方開之得方體之廣及高即渾揹圓之兩徑也

三十二則

三乘還原即開三乘方

設三乘積六百二十五尺求還原法曰置積為實平方開之得二十五尺再以平方開之得五尺即所求

解曰以五自乘再乘三乘得六百二十五即所謂三乘方也反求元數即所謂開三乘方也三乘原無形

體可言但法類于開平方立方故亦謂之方耳○從此推之一次平方一次立方可開五乘方三次平方可開七乘方

三十三則

委粟求積

設委粟底周八十八尺高八尺八寸求積法曰置周自乘得七千七百四十四尺以高乘之得六萬八千一百四十七尺二寸再七乘二百六十四除得一千八百零六尺九寸三分有奇即所求

解曰此即圓錐也圓形與周上方形之比例若七與八十八二卷五則凡兩體等高者體與體之比例若底與底圓體與周上等高方體之比例必亦若七與八十八令圓錐居圓體三之一以三

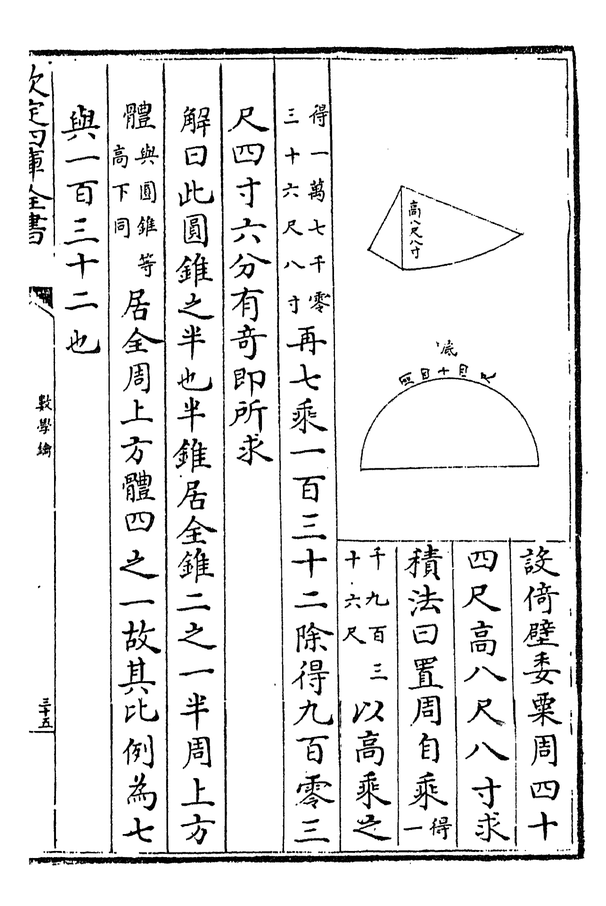
高八尺八寸

周八十八尺

乘八十八得二百六十四則是圓錐與周上等高方體之比例必若七與二百六十四矣

二十四則

倚壁委粟求積



設倚壁委粟周四十四尺高八尺八寸求積法曰置周自乘（得一千九百三十六尺）以高乘之（得一萬七千零三十六尺八寸）再七乘一百三十二除得九百零三尺四寸六分有奇即所求

解曰此圓錐之半也半錐居全錐二之一半周上方體與圓錐等（高下同）居全周上方體四之一故其比例為七與一百三十二也

三十五則

倚外角委粟求積

設倚外角委粟周六十六尺高八尺八寸求積法曰

高八尺八寸

底

周六十六尺

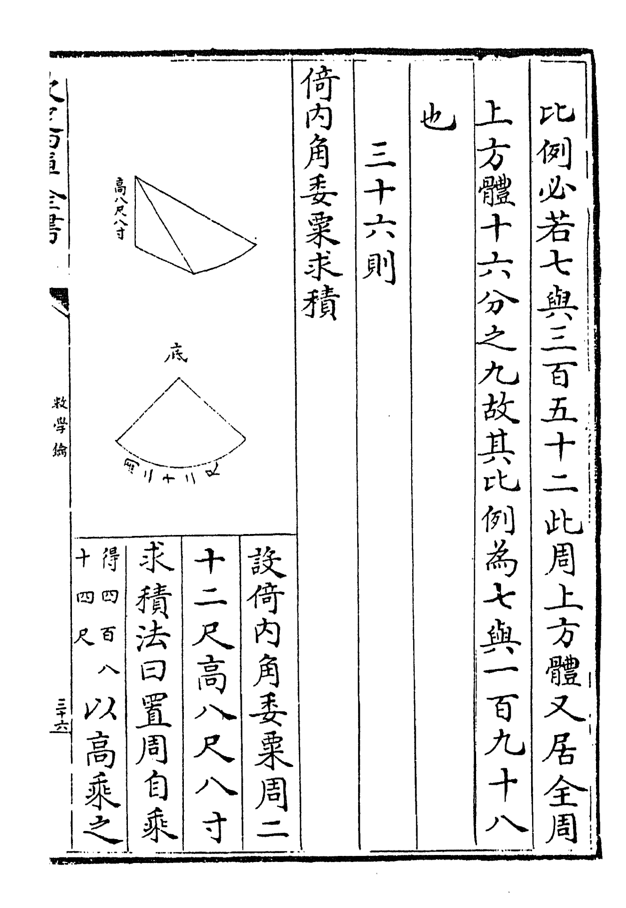
置周自乘得四千三百五十六尺以高乘之得三萬八千三百三十二尺八寸再七乘一百九十八除得一千三百五十五尺二寸即所求

解曰此圓錐四之三也與全周上方體與圓錐等之高下同

比例必若七與三百五十二此周上方體又居全周上方體十六分之九故其比例為七與一百九十八也

三十六則

倚內角委粟求積



設倚內角委粟周二十二尺高八尺八寸求積法曰置周自乘得四百八十四尺以高乘之

得四千二百五十九尺二寸再七乘六十六除得四百五十一尺七寸三分有奇即所求

解曰此圓錐四之一也與全周上方體與圓錐等高下同之比例必若七與一千零五十六此周上方體又居全周上方體十六分之一故其比例為七與六十六也

三十七則

方平堆以周求積

設方平堆周二十四求積法曰置周四歸之得六加一得七自乘得四十九即所求

解曰四歸者求一邊之數也加一者每角尚缺一枚也如上為

方堆下為方田縱廣皆七而方田之周得二十八方堆之周止得二十四以周數有連根除根之異故也

三十八則

方平堆以積求周

設方平堆積四十九求周法曰置積為實平方開之

得七減一餘六以四因之得二十四即所求

解曰即前法反用之

三十九則

三角平堆以濶求積

設三角平堆底濶七求積法曰置濶七加上一得八折半得四以濶七乘之得二十八即所求

解曰三角堆與三角田不同三角田角鋭之極至不可以濶言

堆角銳至一枚而止有一則有濶也有濶則梯形非三角形矣並頂一底七折半者用梯形法也以底濶乘之何也凡三角堆底數即其層數以濶乘即以長乘也

四十則

三角平堆以積求濶

設三角平堆積二十八求底濶法曰置積倍之得五十六以一為縱方平方帶縱開之得七即所求

解曰倍積則成横七縱八之直形

而不成方形長多濶一故以一為縱方也　如求周

取底濶減一以三因之

四十一則

梯形平堆以濶求積

設梯形平堆上濶三下濶七求積法曰並兩濶折半

得五為實另以上濶減一餘二以減下濶餘五為法乘實得二十五即所求

解曰並兩濶折半梯形求積法也

上濶減一以減下濶者求堆之層

數也梯形本三角之截形三角堆底數即層數本卷三十

八則今下濶既七則三角全堆必七層上濶三知截去小三角堆必濶二濶二層必二也于三角全堆之層數七減去截三角堆之層數二餘五非梯堆之層數而何

四十二則

六邊平堆以邊求積

設六邊平堆每邊六求積法曰置六減一餘五為實以一邊折半得三為法乘之得一十五以邊數六因之得九十加

一得九十一即所求

解曰六邊堆當三角堆六而多一枚也故先求三角積六因之加一即得全積也于每邊六減一者每角各重一枚也另取一邊折半者即底五並頂一折半也（本卷三十九則）○若以周三十求積則置周為實另置周六歸之得五加一折半為法乘之得九十加一與前數同

四十三則

六邊平堆以積求邊

設六邊平堆積九十一求邊濶法曰置積減一三歸之得三十以一為縱方平方帶縱開之得五加一得六即所求

解曰積内減一即六邊堆多于六三角堆之一枚也三角堆本六邊堆六之一法用三歸者取三角堆之倍積也餘同前解。若求周以六因五即得。此即舊所謂圓堆也不知堆不能成圓凡圓皆六邊也

四十四則

塹堵高堆求積

設塹堵高堆底方五（凡高堆底濶即層數故不言高）求積法曰置五加一（共六）為實以高五乘之（得三十）再以濶五乘之（得一百五十）折半得七十五即所求

解曰塹堵體為等高同底方體之半而塹堵堆不為等高同底方堆之半何也塹堵體以甲乙線為界其邊整齊故倍之即為等高同底之方體若塹堵堆以丙乙線為

界其邊不齊每層多半枚高五層多二枚半濶五層共多十二枚半倍之則多二十五枚恰是丁戊巳庚一面之積也今並兩塹堵成一高五長六濶五之直堆若減丁戊巳庚一面則成方堆與塹堵同底等高矣反之于塹堵堆求同底等高之方堆增出丁戊巳庚一面折半則得塹堵堆法置五加一為實者即增此一面之法也○後或加二加一加半皆此意也不能盡為圖解俱依此例推之

四十五則

方底高堆求積

設方底高堆底方五求積法曰置五加一（共六）為實以五乘之（得三十）另以五加半枚（共五枚半）乘之（得一百六十五）三歸之得五十五即所求

解曰將方底高堆三倍之與同底等高之方堆較多甲乙丙丁一面及戊巳庚辛半面若減去此一面及半面所餘

必同底等高之方堆反之于方底高堆求同底等高之方堆增出甲乙丙丁一面及戊已庚辛半面三歸之必得方底高堆之積法之加一加半者即增此一面及半面之法也

四十六則

三角高堆求積

設三角高堆底濶五求積法曰置五為實另以五加一（得六）乘之（得三十）再以五加二（得七）乘之（得二百一十）六歸之得三十五即所求

解曰將三角堆六倍之與同濶之立方較多甲乙丙丁二面及戊巳庚辛一面

若減去此三面即為三角堆同濶之立方反之于同濶立方增出三面六歸之則得三角高堆之積法加一加二者即增此三面之法也

四十七則

直底高堆求積

設直底高堆底長七濶五頂長三求積法曰倍底長加頂長共一十七以濶乘之得八十五另置八十五以高乘之濶即高〇得四百二十五兩數並共五百一十六歸之得八十五即所求

解曰倍底長加脊長以濶乘再以高乘而六歸之銳脊體求積之法也本卷十五則又加入八十五者乃整齊之體與不齊之堆相差之數也

〇如無脊長則以底濶減底長加

一即得

四十八則

直底銳面堆求積方底銳面堆同

設直底銳面堆面長四濶二底長七濶五求積法曰倍面長加底長共一十五以面濶乘之得三十另倍底長加面長共一十八以底濶乘之得九十又以面長減底長餘三三數並共一百二十三以高乘之面濶減一以減底濶餘四即高得四百九十二。六歸之得八十

二即所求

解曰此用銳面直體求積之法（本卷十九則）以面長減底長并入者亦補不齊之堆所多出之數也○如無面長則以面濶與底濶相減餘三以減底長即得如無面濶則以面長與底長相減餘三以減底濶即得

四十九則

三角銳面堆求積（諸銳面堆附）

設三角銳面堆面濶二底濶五求積法曰以面濶自乘（得四）底濶自乘（得二十五）兩濶相乘（得十）又倍底濶加面濶

得一十二四數並共五十一以高乘之面濶減一以減底濶餘四即高○得二百零四六歸之得三十四即所求

解曰此用銳面三角體求積法銳面三角體當銳面方體之半銳面方體用三歸故六歸為銳面三角體

求積法倍底濶加面濶並入者亦補多出之數同前解

○凡銳面堆皆同底高堆之截體若先求高堆全積減去堆外虛積即得所求銳面堆之積